Universidad Simón Bolívar

Departamento de Matemáticas Puras y Aplicadas

Septiembre-Diciembre 2017

Nombre: ______________________

Carné: ______________ Sección: ______

2$^{\text{do}}$ Parcial de Matemáticas VII. Bloque A.

TABLA DE TRANSFORMADAS DE FOURIER: $f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{f}(\omega) \quad (a, x, \omega \in \mathbb{R},\ c > 0,\ \alpha, \beta \in \mathbb{C})$

La expresión $1_{(-c,c)}(x)$ indica la función que vale 1 para $-c < x < c$ y vale 0 en cualquier otro caso.

Definiciones

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}\,\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}\,\mathrm{d}\omega$$

$$\mathcal{F}\Big(\alpha f(x) + \beta g(x)\Big)(\omega) = \alpha\hat{f}(\omega) + \beta\hat{g}(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,\mathrm{d}x = 2\pi\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)\overline{\hat{g}(\omega)}\,\mathrm{d}\omega$$

Reglas operacionales

$f(x-a)$	$\to$	$e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega)$
$e^{iax}f(x)$	$\to$	$\hat{f}(\omega - a)$
$f(ax)$	$\to$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}(\omega/a)$
$f_{\text{gen}}^{(n)}(x)$	$\to$	$(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$
$x^n f(x)$	$\to$	$i^n\hat{f}_{\text{gen}}^{(n)}(\omega)$
e^{-cx^2}	$\to$	$\frac{1}{\sqrt{4\pi c}}e^{-\frac{\omega^2}{4c}}$

Algunas transformadas

$\frac{1}{c^2+x^2}$	$\to$	$\frac{1}{2c}e^{-c\lvert\omega\rvert}$
$e^{-c\lvert x\rvert}$	$\to$	$\frac{c}{\pi(c^2+\omega^2)}$
$\frac{\operatorname{sen}(cx)}{x}$	$\to$	$\left(\frac{1}{2}\right)1_{(-c,c)}(\omega)$
$1_{(-c,c)}(x)$	$\to$	$\frac{\operatorname{sen}(c\,\omega)}{\pi\omega}$
1	$\to$	$\delta(\omega)$
$\delta(x)$	$\to$	$\frac{1}{2\pi}$
$f(x)g(x)$	$\to$	$\left(\hat{f} * \hat{g}\right)(\omega)$

---

1. [Total: 12 puntos] Considere la función $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - x$, definida en $\mathrm{Dom}(f) = [0, \pi]$.
   (a) [4 puntos] Halle el desarrollo en serie de Fourier de cosenos de f.
   (b) [4 puntos] Halle $\sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n\rvert^2$, siendo a_n el n-ésimo coeficiente de la serie de Fourier (coseno) de f.
   (c) [4 puntos] Calcule el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}$.

2. [15 puntos] Mediante el cambio $u(x,t) = w(t)v(x,t)$, resuelva el problema de valor inicial y de frontera

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} - 2hu_t \quad \text{para } 0 < x < L \text{ y } t > 0 \quad (\text{con } 0 < h < \frac{\pi c}{L})$$

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 & u(x,0) = f(x) \\ u(L,t) = 0 & u_t(x,0) = 0. \end{cases}$$

3. [10 puntos] Calcule el valor de la integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\frac{1 - e^{iaw}}{iw}\right|^2 \mathrm{d}w$.

4. [13 puntos] Considere la función $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{si } x \notin [-1,1] \end{cases}$. Encuentre una solución acotada $u(x,y)$ de

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad (x \in \mathbb{R},\ y > 0) \\ u(x,0) = f(x) \end{cases}$$

¡Justifique todas sus respuestas!